Българска академия на науките. Bulgarian Academy of Sciences
Аерокосмически изследвания в България. 14. Aerospace Research in Bulgaria
София. 1998. Sofia

Едно приложение на степенчатите функции при изследване на последователни процеси

Симеон Денков, Христо Христов

Военен научно-технически институт, София

В практиката на научно-изследователската дейност понякога се налага да се работи с различни функции (накъсано съединени) в последователни интервали на дадена променлива. Съществуват многобройни примери за това: лабораторно изследване на жизнеспособността на корпусната обшивка на космически апарати при обстрелването ѝ с псевдометеоритни частици [1], формиране и развитие на вълни от смущения в системи от тела с дискретно – нееднородни свойства [2], апроксимация на външната скоростна характеристика на двигател [3] и други процеси с последователни интервали на променливата.

Случаите се характеризират с няколко особени зони на развитие на процеса, всяка от които има свой собствен характер, общ вид на степенчатата или накъсано-свързана функция, описваща се от повече от две характерни уравнения, при свързването на които е невъзможно използването на степенчатата функция [4] в традиционния ѝ запис при повече от две променливи:

(1) $$K=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\prod_{j=1}^{N}\Phi(\alpha_i-\alpha_j)\ ,\ \text{при}\ j\neq i\ ,$$

където $\Phi(\alpha_i-\alpha_j)$ е степенчата функция.

Възниква въпросът може ли по някакъв начин да се намери една обща функция, която да съвмести в себе си над две до определен брой различни функции, като всяка от тях е в сила само в точно определен диапазон от стойности на дадена променлива, а в същото време различните диапазони следват непосредствено един след друг и представляват една непрекъсната цялостна област в някакъв обобщен голям диапазон?

Отговорът на този въпрос е положителен и може да разреши известните от математиката степенчати функции, които в някои литературни източници и съвременни математични програмни продукти са известни като функции на Хевисайд (Heaviside), като се извърши едно модифициране и развитие за конкретните нужди.

Известни са няколко разновидности на степенчатите функции, но тук ще бъде засегнат вариантът, намиращ приложение в математичните софтуерни пакети, а именно:

$\Phi(x)=0$, когато x е по-малко от нула, т. е. отрицателно число,

$\Phi(x)=1$, когато x е равно или по-голямо от нула, т. е. положително число.

Нека разгледаме един пример на процес, който се описва с четири уравнения в четири последователни поддиапазона, определени от пет гранични стойности:

$f_1(x)=\mathrm{func}_1(x)$, за поддиапазона от x_1 до x_2;
$f_2(x)=\mathrm{func}_2(x)$, за поддиапазона от x_2 до x_3;
$f_3(x)=\mathrm{func}_3(x)$, за поддиапазона от x_3 до x_4;
$f_4(x)=\mathrm{func}_4(x)$, за поддиапазона от x_4 до x_5,

където $f_i(x)$ са конкретните функции $\mathrm{func}_i(x)$ за съответния поддиапазон, всяка имаща свой собствен характер, а променливата x е една.

Глобалната (или съставната) функция в този случай ще има вида

(2) $$F(x)=H_{S1}(x)\,f_1(x)+H_{S2}(x)\,f_2(x)+H_{S3}(x)\,f_3(x)+H_{S4}(x)\,f_4(x),$$

където $H_{Si}(x)$ е произведение от функциите на Хевисайд, дефинирано така, че когато променливата x заема стойност от даден поддиапазон, то има стойност 1 (единица), а за останалите поддиапазони – 0 (нула).

В разгърнат вид тези произведения се дефинират така:

(3) $$H_{S1}(x)=\Phi(x-x_1)\,\Phi(x_2-x)\,\Phi(x_3-x)\,\Phi(x_4-x)\,\Phi(x_5-x);$$

(4) $$H_{S2}(x)=\Phi(x-x_1)\,\Phi(x-x_2)\,\Phi(x_3-x)\,\Phi(x_4-x)\,\Phi(x_5-x);$$

(5) $$H_{S3}(x)=\Phi(x-x_1)\,\Phi(x-x_2)\,\Phi(x-x_3)\,\Phi(x_4-x)\,\Phi(x_5-x);$$

(6) $$H_{S4}(x)=\Phi(x-x_1)\,\Phi(x-x_2)\,\Phi(x-x_3)\,\Phi(x-x_4)\,\Phi(x_5-x).$$

При многодиапазонно разпределение на работната област по-лесно може да се обясни алгоритъмът, ако представим функциите на Хевисайд като една условна матрица, на която по главния диагонал от ляво на дясно на всеки следващ ред се извършва по едно обръщане на действието изваждане, което за горния пример би изглеждало така:

(7) $$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x & x_3-x & x_4-x & x_5-x \\ x-x_1 & x-x_2 & x_3-x & x_4-x & x_5-x \\ x-x_1 & x-x_2 & x-x_3 & x_4-x & x_5-x \\ x-x_1 & x-x_2 & x-x_3 & x-x_4 & x_5-x \end{vmatrix}$$

От този кратък пример достатъчно ясно се вижда как може да се организира работата и за значително по-голям брой поддиапазони с различен характер на поведение на функциите.

Що се касае до въпроса за съвпадането на стойностите на две съседни функции в граничната точка, това вече е друг въпрос и зависи от самото аналитично представяне на функциите и начините, при които те са изведени или апроксимирани и т. н.

А сега нека едновременно усложним и опростим задачата.

Усложняването ще бъде в резултат на въвеждането на две нови функции, едната валидна за всички стойности под долната граница, а другата – за всички стойности над горната граница:

$f_0(x)=\mathrm{func}_0(x)$, за стойности на x, по-малки от x_1;

$f_5(x)=\mathrm{func}_5(x)$, за стойности на x, по-големи от x_5.

Опростяването ще бъде за сметка на намаляване на броя на действията умножение. При внимателен анализ на уравнения (3), (4), (5) и (6) става ясно, че обвързването на променливата с конкретен поддиапазон зависи само от границите на конкретния поддиапазон, при което останалите поддиапазони имат дотолкова значение, доколкото произведението на функциите на Хевисайд при тях да бъде равно на нула, а това дава възможност за едно сериозно намаляване на броя на действията умножение. Ако отразим това върху условната матрица (7), то тя сега би изглеждала така:

$$
\begin{array}{|ccccc|l}
x_1\text{-}x & & & & & \text{за стойности на } x, \text{ по-малки от } x_1; \\
x\text{-}x_1 & x_2\text{-}x & & & & \text{за стойности на } x \text{ от } x_1 \text{ до } x_2; \\
 & x\text{-}x_2 & x_3\text{-}x & & & \text{за стойности на } x \text{ от } x_2 \text{ до } x_3; \\
 & & x\text{-}x_3 & x_4\text{-}x & & \text{за стойности на } x \text{ от } x_3 \text{ до } x_4; \\
 & & & x\text{-}x_4 & x_5\text{-}x & \text{за стойности на } x \text{ от } x_4 \text{ до } x_5; \\
 & & & & x_5\text{-}x & \text{за стойности на } x, \text{ по-големи от } x_5.
\end{array}
$$

В резултат на тези опростявания глобалната функция [2] в разгърнат израз за посочения пример ще придобие своя окончателен вид, както следва:

$$
\begin{aligned}
F(x) = {} & \Phi(x_1\text{-}x)\, f_0(x) + \Phi(x\text{-}x_1)\, \Phi(x_2\text{-}x)\, f_1(x) + \Phi(x\text{-}x_2)\, \Phi(x_3\text{-}x)\, f_2(x) \\
& + \Phi(x\text{-}x_3)\, \Phi(x_4\text{-}x)\, f_3(x) + \Phi(x\text{-}x_4)\, \Phi(x_5\text{-}x)\, f_4(x) + \Phi(x_5\text{-}x)\, f_5(x).
\end{aligned}
$$

Обобщаването на резултатите от това примерно изследване води до дефинирането на следните уравнения за многодиапазонен характер на уравнения спрямо една променлива:

а) Общ случай, когато променливата се изменя в целия интервал от възможни стойности, в който са дефинирани N гранични стойности, при което уравненията са N+1 на брой:

$$
F(x) = \Phi(x_1 - x) f_0(x) + \sum_{i=1}^{N} \left[\Phi(x - x_i) \Phi(x_{i+1} - x) f_i(x) \right] + \Phi(x - x_N) f_N(x)\,;
$$

б) Частен случай, когато променливата се изменя само в определен интервал от няколко поддиапазона, дефинирани с N гранични стойности, при което уравненията са N-1 на брой:

$$
F(x) = \sum_{i=1}^{N} \left[\Phi(x - x_i) \Phi(x_{i+1} - x) f_i(x) \right].
$$

В резултат на това изследване е разработено едно приложение на стъпалата функция на Хевисайд за случаи на обобщаваща функция на различни функции в последователни интервали на дадена обща променлива при математическото интерпретиране на последователни процеси.

Литература

1. Баранов, В., Хр. Христов, Ст. Петков, Кр. Бояджиев. Разработване на кумулативни заряди за изстрелване на псевдометеоритни частици. – Аерокосмически изследвания в България, № 11, 97 – 102.

2. Христов, Хр. Уравнение на фронта на плъзгаща се детонационна вълна по границата между два заряда. НТК, В. Търново, ВВОВУ "Васил Левски", Ремонт на въоръжението и техниката, 1996.

3. Денков, С. Математическо моделиране на скоростната характеристика на двигатели с вътрешно горене в целия диапазон от обороти. Раздел от отчет по НИ и ОКД. С., ВНТИ, 1996.

4. Корн, Г., Т. Корн. Справочник по математике. М., Наука, 1977, с. 831.

Постъпила на 22. XI. 1996 г.

A case of an application of step functions in the study of consecutive processes

Simeon Denkov, *Christo Christov*

(Summary)

The article deals with a case of an application of the step functions, to be more precise - with the function of Heaviside, in the study of consecutive processes, and equations for its particular application have been worked out. The function is used in the mathematical interpretation of consecutive processes which run, in particular, in aerospace studies: remote monitoring, imitation of highspeed impacts and development of waves of interferences in a system of bodies, approximation of speed characteristics of an engine and other processes, in which the character of the process in different consecutive intervals of the variable has a different mathematical interpretation.