

## Метод на допълнителната променлива в задачата за филтрация на пространствените координати и параметрите на движение на подвижни обекти

*Венцеслав Рашков, Ангел Христов*

*Институт за космически изследвания, БАН*

### I. Въведение

Една от възможностите за удовлетворяване на високоточностните нужди на съвременната комуникация и транспорт е развитието на многопозиционни радиотехнически навигационни системи (МРНС) [1]. Основен проблем при усъвършенстване на съществуващите и разработка на нови МРНС се явява по-нататъшното повишаване на тяхната точност и шумоустойчивост.

Решаването на този проблем без допълнителни апаратурни усложнения и оскъпяване на системата се осъществява чрез реализация на оптимален алгоритъм за обработка на сигнали, основан на пълно извличане на информацията от радиосигнала. Точността на филтрацията може да бъде повишена за сметка на използване на алгоритми с обединена синхронизация, използващи съвместната информация за задръжката на сигнала, съдържаща се в обвиващата и във фазата на високочестотното запълнение [2].

Ще се спрем по-подробно на нелинейната филтрация при многомодално апостериорно разпределение [3]. Съгласно с теорията на оптималната филтрация на марковски процеси точното решение на задачата на филтрация се свежда към рекурентни уравнения за апостериорната плътност на вероятността (АПВ) на неизвестните параметри  $p(t, \lambda)$ . Но непосредствената реализация на тези уравнения в повечето случаи е невъзможна. За приближено решаване са предложени редица методи, от които основен остава методът на гаусова апроксимация, водещ към алгоритми, близки до разширен филтър на Калман. В задачите на обединена синхронизация [2,5] този метод дава неработоспособни алгоритми, тъй като АПВ има изразен многопиков характер. В този случай еднопиковата нормална плътност на вероятността не може да осигури удовлетворителна апроксимация на АПВ. Ето защо използването

на метода на гаусово приближение води към алгоритми на филтрация с характерна нееднозначност.

Обикновено причина за многопиковия характер на  $p(t, \lambda)$  се явява наличието на някаква периодична функция от  $\lambda$  в моделите на наблюдението или съобщението.

За отчитане на многопиковостта на АПВ може да се предложат различни апроксимации. Очевидни са опитите [2,5] за използване на полигаусова апроксимация. Недостатък на такъв подход се явяват големият брой неизвестни параметри на разпределение и следователно сложността на реализацията. В [2,5] е предложена и изследвана апроксимация на АПВ чрез произведение на гаусова обвиваща и периодично запълнение. В [5, 6] е предложен подход, наречен метод на разделяне на задръжките. Той позволява да се освободим от някои ограничения на другите методи, разгледани в [2,5]; води към прости алгоритми, удобни за реализация и отличаващи се с по-голяма общност.

При псевдодалекомерен метод задачата се свежда към оптимално определяне на координатите на подвижния обект (ПО) по наблюдението на сигналите в условия на шумове с отчитане наличието на разсъгласуване на времето на опорния генератор на подвижния обект относно времето на синхронните източници на излъчване (ИИ).

## 2. Формулировка на задачата

На ПО с координати  $X = (x, y, z)$  се наблюдават сигнали от три ИИ с известни координати  $X_k = (x_k, y_k, z_k)$ ,  $k=1, 2, 3$  в правоъгълна координатна система. На входа на приемника на ПО се наблюдава

$$(1) \quad \xi(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t),$$

където  $s(t, \lambda(t)) = \sum_{k=1}^3 s_k(t - T_k(\lambda))$  е полезен сигнал, представляващ сума от сигналите  $s_k(t - T_k(\lambda))$  от всеки ИИ:

$$(2) \quad s_k(t - T_k(\lambda)) = f_k(t - T_k(\lambda)) \cos[\omega_0(t - T_k(\lambda))];$$

$T_k(\lambda) = \tau_k(X) + \Delta$  е време на пристигане на сигнала от  $k$ -ти ИИ;

$\Delta(t)$  — разсъгласуване на скалата на ПО от системното време;

$\tau_k(X) = c^{-1} [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2]^{1/2}$  — истинно време на закъснение на сигнала от  $k$ -ти ИИ;

$c$  — скорост на светлината;

$\lambda^T = (x, V_x, y, V_y, \Delta, V_\Delta)$  — вектор на състоянието, включващ координатите на ПО и  $\Delta$ , а също  $V_x, V_y, V_\Delta$  — скоростите на изменение на  $x, y$  и  $\Delta$ ;

$n(t)$  — бял гаусов шум (БГШ) с характеристики  $M\{n(t)\} = 0$  и  $M\{n(t)n(t+\tau)\} = (N/2)\delta(\tau)$ .

Във вектора на състоянието не се включват координатата  $z$  и векторът на скоростта  $V_z$  по същата координата. Приемаме, че  $z = \text{const}$  и  $V_z = 0$ . Векторът  $\lambda$  може да бъде описан чрез гаусов дифузионен марковски процес, удовлетворяващ системата стохастически диференциални уравнения

$$(3) \quad \dot{\lambda} = F\lambda + p_\lambda(t),$$

$$\begin{aligned}
 x &= V_x, \\
 \dot{V}_x &= -\alpha_x V_x + n_x(t), \\
 y &= V_y, \\
 \dot{V}_y &= -\alpha_y V_y + n_y(t), \\
 \Delta &= V_\Delta, \\
 \dot{V}_\Delta &= -\alpha_\Delta V_\Delta + n_\Delta(t).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Тук  $n_x(t)$ ,  $n_y(t)$  и  $n_\Delta(t)$  са независими БГШ с едностранни спектрални плътности  $N_x$ ,  $N_y$  и  $N_\Delta$ .

Матриците на коефициентите на сноса и дифузията са

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_\Delta \end{vmatrix}; \quad \mathbf{N}_\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_x/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_y/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_\Delta/2 \end{vmatrix};$$

$$n_\lambda^T(t) = [0, n_x(t), 0, n_y(t), 0, n_\Delta(t)];$$

$$M\{n_\lambda(t)n_\lambda^T(t-\tau)\} = N_\lambda \delta(\tau).$$

### 3. Същност на метода

В дадения случай многопиковостта на АПВ  $p(t, \lambda)$  е обусловена от периодичността на носещата на сигналите от ИИ относно времената на закъснение  $T_k(\lambda)$  с период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Въвеждаме вектор от допълнителни променливи за сигналите от трите ИИ

$$\mathbf{T}_d^T = (T_{d1}, T_{d2}, T_{d3}),$$

където  $T_{d1}$ ,  $T_{d2}$ ,  $T_{d3}$  са времена на закъснение на високочестотните запълнения на сигналите, излъчени от ИИ, т. е. вместо вектор  $\lambda$  ще разглеждаме вектор на състоянието  $\lambda_d^T = \{\lambda^T, \mathbf{T}_d^T\}$ , при това тяхната тъждественост в изходната задача ще отчетем в априорното разпределение (за  $t=0$ )

$$P_{pr}(\lambda, \mathbf{T}_d) = P_{pr}(\lambda) \delta[\mathbf{T}_d - \mathbf{T}(\lambda)],$$

където  $\mathbf{T}^T(\lambda) = [T_1(\lambda), T_2(\lambda), T_3(\lambda)]$ , а също и в уравнението на динамиката

$$\dot{\mathbf{T}}_d = \frac{d\mathbf{T}(\lambda)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{T}(\lambda)}{\partial \lambda^T} \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

което осигурява изпълнението на условието  $\mathbf{T}_d - \mathbf{T}(\lambda) = \text{const.}$

От (3) и (6) следва

$$(7) \quad \dot{T}_d = \frac{\partial T(\lambda)}{\partial \lambda^T} F \lambda + \frac{\partial T(\lambda)}{\partial \lambda^T} \mathbf{n}_\lambda(t).$$

От физични съображения АПВ

$$P(t, \lambda, T_d) = P\{\lambda(t), T_d(t) | \xi_0^t\}$$

във всеки момент от време трябва да съдържа делта-функция  $\delta[T_d - T(\lambda)]$ , наличието на която отразява нашето знание за това, че във всеки момент от време е в сила равенството  $T_d = T(\lambda)$ .

Избираме спомагателна априорна плътност  $W_d(\lambda, T_d)$ , така че да удовлетворява условието

$$(8) \quad W_d[\lambda, T_d = T(\lambda)] = c P_{pr}(\lambda).$$

При това се оказва вярно съотношението

$$(9) \quad P(t, \lambda, T_d) = c P_d(t, \lambda, T_d) \delta[T_d - T(\lambda)],$$

което се доказва по метода, описан в [3]. В (9)  $P_d(t, \lambda, T_d)$  е АПВ за задачата на филтрация с априорна плътност  $W_d(\lambda, T_d)$ , модел на съобщението (3), (6) и модел на наблюдението (1), (2). В [3] се разглежда разширен вектор на състоянието  $\{\tau, \tau_d\}$ , където  $\tau$  е времезакъснение на обвиващата на сигнала от единствен ИИ, а  $\tau_d$  е времезакъснение на носещата на сигнала от същия ИИ. В процеса на доказателството се преминава към нови променливи  $\tau, \varepsilon = \tau_d - \tau$  [3]. В нашия случай за доказване на (9) се процедира по същия метод, но разширеният вектор на състоянието е  $\lambda_d = \{\lambda, T_d\}$ , където  $\lambda$  и  $T_d$  са векторни променливи. Новите променливи, към които се извършва преходът, са  $\lambda$  и  $\varepsilon = T_d - T(\lambda)$ . От (9) следва основополагащият извод, че за АПВ  $P(t, \lambda)$  на изходната задача на филтрация е справедливо съотношението

$$(10) \quad P(t, \lambda) = c P_d[t, \lambda, T(\lambda)].$$

Изходната задача с уравнение на наблюдението (1), (2) и уравнение на съобщението (3), (4) се свежда към нова допълнителна задача. Вместо уравнение (1), (2) записваме ново наблюдение, в което влизат допълнителните променливи  $T_d$ :

$$(11) \quad \xi(t) = s(t, \lambda, T_d) + n(t),$$

$$s(t, \lambda, T_d) = \sum_{k=1}^3 f_k[t - T_k(\lambda)] \cos[\omega_0(t - T_{dk})],$$

където  $f_k[t - T_k(\lambda)]$  е обвиваща на сигнала от  $k$ -ти ИИ.

Уравнението на динамиката в допълнителната задача се явява уравнение (3), (4), допълнено с (6).

За да конкретизираме (6) и (7), трябва да намерим вектора от производните  $\partial T_k(\lambda) / \partial \lambda^T$

$$(12) \quad \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial \lambda^T} = \frac{\partial(\tau_k(X) + \Delta)}{\partial \lambda^T} = \frac{\partial \left[ \frac{1}{c} \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2} + \Delta \right]}{\partial \lambda^T};$$

$$\frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{c} (x-x_k) [(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2]^{-1/2} = \frac{\cos \alpha_k}{c};$$

$$\frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial y} = -(y-y_k)[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos \beta_k}{c};$$

$$\frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial \Delta} = 1; \quad \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial V_x} = \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial V_y} = \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial V_z} = 0,$$

където  $\cos \alpha_k, \cos \beta_k$  са директорни косинуси към направлението на  $k$ -ти ИИ

$$(13) \quad \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial \lambda^T} = \left| \frac{\cos \alpha_k}{c}, 0, \frac{\cos \beta_k}{c}, 0, 1, 0 \right|.$$

От (7) получаваме

$$(14) \quad \dot{\mathbf{T}}_d = \mathbf{F}_{Td} \lambda + \mathbf{O}_{(3 \times 1)},$$

където  $\mathbf{O}_{(3 \times 1)}$  е вектор-стълб от три елемента;

$$\mathbf{F}_{Td} = \frac{\partial \mathbf{T}(\lambda)}{\partial \lambda^T} \mathbf{F},$$

$$(15) \quad \mathbf{F}_{Td} = \begin{vmatrix} 0 & c^{-1} \cos \alpha_1 & 0 & c^{-1} \cos \beta_1 & 0 & 1 \\ 0 & c^{-1} \cos \alpha_2 & 0 & c^{-1} \cos \beta_2 & 0 & 1 \\ 0 & c^{-1} \cos \alpha_3 & 0 & c^{-1} \cos \beta_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

За допълнителната задача уравнението на динамиката има вида

$$(16) \quad \dot{\lambda}_d = \mathbf{F}_d \lambda_d + \mathbf{n}_{\lambda_d}(t),$$

където  $\lambda_d^T = \{\lambda^T, \mathbf{T}_d^T\}$ ,  $\mathbf{n}_{\lambda_d}^T(t) = \{\mathbf{n}_k^T(t), 0, 0, 0\}$ .

Матриците на коефициентите на сноса и дифузията са

$$\mathbf{F}_d = \begin{vmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{O}_{(6 \times 3)} \\ \mathbf{F}_{Td} & \mathbf{O}_{(3 \times 3)} \end{vmatrix} \quad \mathbf{N}_{\lambda_d} = \begin{vmatrix} \mathbf{N}_{\lambda} & \mathbf{O}_{(6 \times 3)} \\ \mathbf{O}_{(3 \times 6)} & \mathbf{O}_{(3 \times 3)} \end{vmatrix}$$

Уравнението на филтрация на Стратонович приема вида:

$$(17) \quad \frac{\partial P_d(t, \lambda, \mathbf{T}_d)}{\partial t} = L_d \{P_d(t, \lambda, \mathbf{T}_d)\} + [F(t, \lambda, \mathbf{T}_d) - F(t)] P_d(t, \lambda, \mathbf{T}_d)$$

с начално условие  $P(0, \lambda, \mathbf{T}_d) = W_d(\lambda, \mathbf{T}_d)$ , удовлетворяващо (8).

Операторът на Фокер — Планк — Колмогоров (ФПК) е

$$L_d \{\cdot\} = - \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \{f_{\lambda_{d_i}}(t, \lambda_{d_i}) \cdot\}}{\partial \lambda_{d_i}} + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^9 N_{\lambda_{d_{ij}}} \frac{\partial^2 \{\cdot\}}{\partial \lambda_{d_i} \partial \lambda_{d_j}},$$

където  $f_{\lambda_d}(t, \lambda_d) = \mathbf{F}_d \lambda_d$ .

$$F(t, \lambda, \mathbf{T}_d) = (2/N) \left\{ \xi(t) s(t, \lambda, \mathbf{T}_d) - \frac{1}{2} s^2(t, \lambda, \mathbf{T}_d) \right\},$$

$$F(t) = \iint F(t, \lambda, \mathbf{T}_d) P_d(t, \lambda, \mathbf{T}_d) d\lambda d\mathbf{T}_d.$$

Поради периодичността на сигнала  $s_k(t, \lambda, \mathbf{T}_{dk})$  и на коефициентите на

оператора на ФПК по променливите  $T_d$  следва строга периодичност на АПВ, т. е.  $P_d(t, \lambda, T_d) = P_d(t, \lambda, T_d + T_0 E^T)$ , където  $E = [1, 1, 1]$ .

Многопиковият характер лесно се отчита и е достатъчно да се опише нормалната плътност на вероятността на една „гърбица“ на  $P_d(t, \lambda, T_d)$ , а после периодично да се прилага това описание за цялата АПВ.

Използвайки метода на гаусова апроксимация, получаваме

$$(18) \quad P_d(t, \lambda, T_d) = c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \{ -0,5 [\lambda^T - m_\lambda^T, T_d^T - (m_d^T + kT_0 E)] R^{-1} \times [\lambda^T - m_\lambda^T, T_d^T - (m_d^T + kT_0 E)]^T \}.$$

Уравненията на разширения филтър на Калман имат вида

$$(19) \quad \dot{m}_{\lambda_d} = F_d \lambda_d + R(2/N) [\xi(t) - s(t, m_{\lambda_d})] [\partial s(t, m_{\lambda_d}) / \partial \lambda_d],$$

където  $m_{\lambda_d}^T = \{m_\lambda^T, m_d^T\}$ ;

$$(20) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = F_d R + R F_d^T + N_{\lambda_d} - R F_2 R,$$

където

$$R = \begin{bmatrix} R_\lambda & R_{\lambda T_d} \\ R_{T_d \lambda} & R_{T_d} \end{bmatrix}, \quad R_{\lambda T_d} = R_{T_d \lambda}^T,$$

$$F_2 = (2/N) [\partial s(t, m_{\lambda_d}) / \partial \lambda_d^T] [\partial s(t, m_{\lambda_d}) / \partial \lambda_d^T]^T.$$

Апроксимацията на АПВ  $P(t, \lambda)$  се получава от (18) и (10)

$$(21) \quad P(t, \lambda) = c P_d(t, \lambda, T(\lambda)) = c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \{ -0,5 [\lambda^T - m_\lambda^T, T^T(\lambda) - (m_d^T + kT_0 E)] R^{-1} [\lambda^T - m_\lambda^T, T^T(\lambda) - (m_d^T + kT_0 E)]^T \}.$$

Ще определим оценката на максимално правдоподобие  $\lambda^* = \max_{\lambda}^{-1} \{P(t, \lambda)\}$ .

От (21) следва, че  $V_x^* = m_{V_x}$ ,  $V_y^* = m_{V_y}$ ,  $V_\Delta^* = m_{V_\Delta}$  и

$$(22) \quad \begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \\ \Delta^*(t) \end{bmatrix} = \max_{x, y, \Delta}^{-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -0,5 [x - m_x, y - m_y, \Delta - m_\Delta, T^T(x, y, \Delta) - (m_d + kT_0 E)] \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{x\Delta} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{y\Delta} \\ R_{\Delta x} & R_{\Delta y} & R_{\Delta\Delta} \end{bmatrix}^{-1} [x - m_x, y - m_y, \Delta - m_\Delta, T^T(x, y, \Delta) - (m_d + kT_0 E)]^T \right\} \right\}.$$



Ако „пиковете“ на АПВ  $P(t, \lambda)$  са тесни относно нейната „обвиваща“, то (22) преминава в правилото:

$$(23) \quad \begin{cases} x^*(t) \\ y^*(t) \\ \Delta^*(t) \end{cases} = \max_{x, y, \Delta}^{-1} \{P(t, x, y, \Delta) | T(x, y, \Delta) = m_d + kT_0 E\} \\ \approx \min^{-1} |m_d(t) + kT_0 E^T - T(t, m_x, m_y, m_\Delta)| = m_d(t) + k^* T_0 E^T = T^*,$$

където  $k^T = (k_1, k_2, k_3)$ ;  $k^{*T} = (k_1^*, k_2^*, k_3^*)$  е вектор на стойностите на  $k$ , при които се достига екстремум;  $T^{*T} = [T_1^*, T_2^*, T_3^*]$ .

Отгук задачата се свежда до решаване на системата

$$(24) \quad \begin{cases} T_1^* = m_{d1}(t) + k_1^* T_0 = c^{-1} [(x^* - x_1)^2 + (y^* - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2} + \Delta^*, \\ T_2^* = m_{d2}(t) + k_2^* T_0 = c^{-1} [(x^* - x_2)^2 + (y^* - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{1/2} + \Delta^*, \\ T_3^* = m_{d3}(t) + k_3^* T_0 = c^{-1} [(x^* - x_3)^2 + (y^* - y_3)^2 + (z - z_3)^2]^{1/2} + \Delta^*, \end{cases}$$

при което се определят  $x^*$ ,  $y^*$  и  $\Delta^*$ .

По-удобен алгоритъм е филтрация с групиране на наблюденията при степенчата апроксимация. При това отчитаме, че сигналът  $s_k(t - T_k(\lambda))$  зависи от сравнително бавно изменящи се процеси  $X(t)$  и  $\Delta(t)$ , които за интервала на дискретизация  $T$  са приблизително постоянни. Затова с някакво приближение можем да считаме, че на всеки тактов интервал  $(t_v, t_{v+1})$  наблюдението се представя във вида

$$\xi(t) = s(t, \lambda_v) + n(t), \quad t \in (t_v, t_{v+1}),$$

където  $\lambda_v = \lambda(t_v)$  е стойността на параметъра в опорните точки  $t_v = vT$ .

Последователността  $\lambda_v$  удовлетворява рекурентното уравнение

$$(25) \quad \lambda_{v+1} = \Phi \lambda_v + \mathbf{n}_{\lambda_v},$$

където  $\Phi = \exp(FT) = L^{-1}\{(pI - F)^{-1}\}$  е преходна матрица на (4) за време  $T$  (период на дискретизация);  $L^{-1}\{\dots\}$  — обратно преобразуване на Лаплас;  $p$  — оператор на Лаплас;  $\mathbf{n}_{\lambda_v}$  — последователност от независими гаусови случайни вектори с математическо очакване  $M\{\mathbf{n}_{\lambda_v}\} = 0$  и корелационна матрица

$$\Psi = M\{\mathbf{n}_{\lambda_v}, \mathbf{n}_{\lambda_v}^T\} = \int_0^T \exp\{F(T-\tau)\} N_{\lambda} \exp\{F^T(T-\tau)\} d\tau.$$

За допълнителната задача уравнението на наблюдението придобива вида

$$\xi(t) = s(t, \lambda_{dv}) + n(t), \quad t \in (t_v, t_{v+1}),$$

където  $\lambda_{dv}^T = \{\lambda_v^T, T_{dv}^T\}$ ,  $T_{dv} = T_d(t_v)$ ,  $t_v = vT$ .

Уравнението на съобщението е

$$(26) \quad \lambda_{d(v+1)} = \Phi_d \lambda_{dv} + \mathbf{n}_{\lambda_{dv}},$$

където  $\Phi_d = \exp\{F_d T\} = L^{-1}\{(pI - F_d)^{-1}\}$ ;  $\mathbf{n}_{\lambda_{dv}}$  е последователност от независими гаусови случайни вектори и с математическо очакване  $M\{\mathbf{n}_{\lambda_{dv}}\} = 0$  и корелационна матрица

$$\Psi_d = M\{n_{\lambda_d y}, n_{\lambda_d y}^T\} = \int_0^T \exp\{F_d(T-\tau)\} N_{\lambda_d} \exp\{F_d^T(T-\tau)\} d\tau.$$

Приложено към системата априорни уравнения (4), (6) изразите на  $\Phi_d$  и  $\Psi_d$  при  $\alpha T \ll 1$  имат вида

$$\Phi_d = \begin{pmatrix} 1 & \Phi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Phi_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Phi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{72} & 0 & \Phi_{74} & 0 & \Phi_{76} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{82} & 0 & \Phi_{84} & 0 & \Phi_{86} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \Phi_{92} & 0 & \Phi_{94} & 0 & \Phi_{96} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

където

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= (1 - \exp(-\alpha_x T)) / \alpha_x, & \Phi_{22} &= \exp(-\alpha_x T), \\ \Phi_{34} &= (1 - \exp(-\alpha_y T)) / \alpha_y, & \Phi_{44} &= \exp(-\alpha_y T), \\ \Phi_{66} &= (1 - \exp(-\alpha_\Delta T)) / \alpha_\Delta, & \Phi_{66} &= \exp(-\alpha_\Delta T), \\ \Phi_{72} &= (\cos \alpha_1 / c) \Phi_{12}, & \Phi_{82} &= (\cos \alpha_2 / c) \Phi_{12}, & \Phi_{92} &= (\cos \alpha_3 / c) \Phi_{12}, \\ \Phi_{74} &= (\cos \beta_1 / c) \Phi_{34}, & \Phi_{84} &= (\cos \beta_2 / c) \Phi_{34}, & \Phi_{94} &= (\cos \beta_3 / c) \Phi_{34}, \\ \Phi_{76} &= \Phi_{86} = \Phi_{96} = \Phi_{66}; \end{aligned}$$

$$\Psi_d = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{17} & \Psi_{18} & \Psi_{19} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{27} & \Psi_{28} & \Psi_{29} \\ 0 & 0 & \Psi_{33} & \Psi_{34} & 0 & 0 & \Psi_{37} & \Psi_{38} & \Psi_{39} \\ 0 & 0 & \Psi_{43} & \Psi_{44} & 0 & 0 & \Psi_{47} & \Psi_{48} & \Psi_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{55} & \Psi_{56} & \Psi_{57} & \Psi_{58} & \Psi_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{65} & \Psi_{66} & \Psi_{67} & \Psi_{68} & \Psi_{69} \\ \Psi_{71} & \Psi_{72} & \Psi_{73} & \Psi_{74} & \Psi_{75} & \Psi_{76} & \Psi_{77} & \Psi_{78} & \Psi_{79} \\ \Psi_{81} & \Psi_{82} & \Psi_{83} & \Psi_{84} & \Psi_{85} & \Psi_{86} & \Psi_{87} & \Psi_{88} & \Psi_{89} \\ \Psi_{91} & \Psi_{92} & \Psi_{93} & \Psi_{94} & \Psi_{95} & \Psi_{96} & \Psi_{97} & \Psi_{98} & \Psi_{99} \end{pmatrix},$$

където  $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$  при  $(i, j = \overline{1,9})$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= N_x T^3 / 6, & \Psi_{12} &= N_x T^2 / 4, & \Psi_{22} &= N_x T / 2, \\ \Psi_{33} &= N_y T^3 / 6, & \Psi_{34} &= N_y T^2 / 4, & \Psi_{44} &= N_y T / 2, \\ \Psi_{55} &= N_\Delta T^3 / 6, & \Psi_{56} &= N_\Delta T^2 / 4, & \Psi_{66} &= N_\Delta T / 2, \\ \Psi_{1(k+6)} &= (\cos \alpha_k / c) \Psi_{11}, & \Psi_{2(k+6)} &= (\cos \alpha_k / c) \Psi_{12}, & \Psi_{3(k+6)} &= (\cos \beta_k / c) \Psi_{33}, \\ \Psi_{4(k+6)} &= (\cos \beta_k / c) \Psi_{34}, & \Psi_{5(k+6)} &= \Psi_{55}, & \Psi_{6(k+6)} &= \Psi_{56}, \end{aligned}$$



$\Psi_{(k+6)(t+6)^{-1}} (\cos \alpha_k/c) (\cos \alpha_l/c) \Psi_{11} + (\cos \beta_k/c) (\cos \beta_l/c) \Psi_{33} + \Psi_{55}$   
 при  $(k, l = \overline{1,3})$ .

При използване на гаусова апроксимация получаваме

$$(27) \quad P_d(v, \lambda_v, T_d) = c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \{ -0,5 [\lambda_v^T - \hat{\lambda}_v^T, T_{dv}^T - (\hat{T}_{dv}^T + k_v T_0 E)] \times R_v^{-1} [\lambda_v^T - \hat{\lambda}_v^T, T_{dv}^T - (\hat{T}_{dv}^T + k_v T_0 E)]^T \}.$$

Уравненията на разширения филтър на Калман за вектора на оценките и корелационната матрица  $R_v$  са

$$(28) \quad \hat{\lambda}_{d(v+1)} = \tilde{\lambda}_{d(v+1)} + (2/N) R_{v+1} \int_{t_v}^{t_{v+1}} \left[ \frac{\partial S(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)})}{\partial \lambda_d^T} \right]^T [\xi(t) - s(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)})] dt,$$

$$(29) \quad R_{v+1}^{-1} = \tilde{R}_{v+1}^{-1} + (2/N) \int_{t_v}^{t_{v+1}} \left[ \frac{\partial S(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)})}{\partial \lambda_d^T} \right]^T \left[ \frac{\partial S(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)})}{\partial \lambda_d^T} \right] dt,$$

където  $\tilde{\lambda}_{dv} = \Phi_{dv} \hat{\lambda}_{d(v+1)}$  е вектор на екстраполираните оценки;  $\tilde{R}_{v+1} = \Phi_{dv} R_v \Phi_{dv}^T + \Psi_{dv}$  — корелационна матрица на екстраполираните оценки;

$$\tilde{\lambda}_{dv}^T = \{ \hat{\lambda}_v, \hat{T}_{dv} \}; \quad R_v = \begin{vmatrix} R_{\lambda_v} & R_{(\lambda T_d)_v} \\ R_{T_d \lambda_v} & R_{T_d v} \end{vmatrix}; \quad R_{(\lambda T_d)_v} = R_{T_d \lambda_v}^T.$$

Отчитайки, че  $\lambda_d$  е вектор на неенергетични параметри, т. е.

$$\left[ \frac{\partial S(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)})}{\partial \lambda_d^T} \right]^T s(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)}) dt \approx 0,$$

то (28) приема вида

$$(30) \quad \hat{\lambda}_{d(v+1)} = \tilde{\lambda}_{d(v+1)} + (2/N) R_{v+1} \int_{t_v}^{t_{v+1}} \xi(t) \frac{\partial S(t, \tilde{\lambda}_{d(v+1)})}{\partial \lambda_d^T} dt.$$

Следвайки (27), за апроксимацията на АПВ  $P(v, \lambda_v)$  се получава

$$(31) \quad P(v, \lambda_v) = c_1 P_d(v, \lambda_v, T(\lambda_v)) \\ = c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \{ -0,5 [\lambda_v^T - \hat{\lambda}_v^T, T^T(\lambda_v) - (\hat{T}_{dv}^T + k_v T_0 E)] R_v^{-1} \\ \times [\lambda_v^T - \hat{\lambda}_v^T, T^T(\lambda_v) - (\hat{T}_{dv}^T + k_v T_0 E)]^T \}.$$

Оценката на вектора на състоянието по критерия на максималното правдоподобие е

$$\lambda_v^* = \max_{\lambda_v}^{-1} \{p(v, \lambda_v)\},$$

$$(32) \begin{pmatrix} x_v^* \\ y_v^* \\ \Delta_v^* \end{pmatrix} = \max_{x_v, y_v, \Delta_v}^{-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-0,5(x_v - \hat{x}_v, y_v - \hat{y}_v, \Delta_v - \hat{\Delta}_v, \mathbf{T}^T(x_v, y_v, \Delta_v) - (\hat{\mathbf{T}}_{dv}^T - kT_0 \mathbf{E})) \begin{pmatrix} R_{xx_v} & R_{xy_v} & R_{x\Delta_v} \\ R_{xy_v} & R_{yy_v} & R_{y\Delta_v} \\ R_{x\Delta_v} & R_{y\Delta_v} & R_{\Delta\Delta_v} \end{pmatrix}^{-1} (x_v - \hat{x}_v, y_v - \hat{y}_v, \Delta_v - \hat{\Delta}_v, \mathbf{T}^T(x_v, y_v, \Delta_v) - (\hat{\mathbf{T}}_{dv}^T - kT_0 \mathbf{E}))^T] \right\}; V_{x_v}^* = \hat{V}_{x_v}; V_{y_v}^* = \hat{V}_{y_v}; V_{\Delta_v}^* = \hat{V}_{\Delta_v}.$$

При тесни „пикове“ на АПВ  $P(v, \lambda_v)$  относно нейната „обвиваща“ може да се счита, че

$$(33) \begin{pmatrix} x_v^* \\ y_v^* \\ \Delta_v^* \end{pmatrix} \approx \min_{k_v}^{-1} |\hat{\mathbf{T}}_{dv} + k_v T_0 \mathbf{E}^T - \mathbf{T}(\hat{x}_v, \hat{y}_v, \hat{\Delta}_v)| = \hat{\mathbf{T}}_{dv} + k_v^* T_0 \mathbf{E}^T = \mathbf{T}_v^*,$$

където  $k_v^*$  е вектор на стойностите на  $k$ , при които се достига екстремум

$\mathbf{T}_v^* = [T_1^*, T_2^*, T_3^*]$  — вектор на коригираните времезадръжки на сигналите от отделните ИИ.

И така задачата се свежда до решаване на системата уравнения, аналогични на (24)

$$(34) \begin{cases} T_{1v}^* = \hat{T}_{d1v} + k_{1v}^* T_0 = c^{-1} [(x_v^* - x_1)^2 + (y_v^* - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2} + \Delta_v^*, \\ T_{2v}^* = \hat{T}_{d2v} + k_{2v}^* T_0 = c^{-1} [(x_v^* - x_2)^2 + (y_v^* - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{1/2} + \Delta_v^*, \\ T_{3v}^* = \hat{T}_{d3v} + k_{3v}^* T_0 = c^{-1} [(x_v^* - x_3)^2 + (y_v^* - y_3)^2 + (z - z_3)^2]^{1/2} + \Delta_v^*, \end{cases}$$

при което се определят  $x_v^*$ ,  $y_v^*$  и  $\Delta_v^*$ .

При конкретизация на векторното уравнение (30) за модела на параметрите (4) се получава следният рекурентен алгоритъм:

$$\hat{x}_{v+1} = \hat{x}_v + \Phi_{12} \hat{V}_{x_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{1k} B_k,$$

$$\hat{V}_{x_{v+1}} = \Phi_{22} \hat{V}_{x_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{2k} B_k,$$

$$\hat{y}_{v+1} = \hat{y}_v + \Phi_{34} \hat{V}_{y_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{3k} B_k,$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{V}_{y_{v+1}} &= \Phi_{44} \widehat{V}_{y_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{4k} B_k, \\
 \widehat{\Delta}_{v+1} &= \widehat{\Delta}_v + \Phi_{55} \widehat{V}_{\Delta_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{5k} B_k, \\
 \widehat{V}_{\Delta_{v+1}} &= \Phi_{66} \widehat{V}_{\Delta_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{6k} B_k, \\
 \widehat{T}_{d1(v+1)} &= \widehat{T}_{d1v} + \Phi_{72} \widehat{V}_{x_v} + \Phi_{74} \widehat{V}_{y_v} + \Phi_{76} \widehat{V}_{\Delta_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{7k} B_k, \\
 \widehat{T}_{d2(v+1)} &= \widehat{T}_{d2v} + \Phi_{82} \widehat{V}_{x_v} + \Phi_{84} \widehat{V}_{y_v} + \Phi_{86} \widehat{V}_{\Delta_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{8k} B_k, \\
 \widehat{T}_{d3(v+1)} &= \widehat{T}_{d3v} + \Phi_{92} \widehat{V}_{x_v} + \Phi_{94} \widehat{V}_{y_v} + \Phi_{96} \widehat{V}_{\Delta_v} + \sum_{k=1}^3 \Gamma_{9k} B_k,
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

където

$$\Gamma_{jk} = (2/N) \left( R_{j1} \frac{\cos \alpha_k}{c} + R_{j3} \frac{\cos \beta_k}{c} + R_{j5} + R_{j7} \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial T_{d1}} + R_{j8} \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial T_{d2}} + R_{j9} \frac{\partial T_k(\lambda)}{\partial T_{d3}} \right) \Big|_{\lambda_d = \widetilde{\lambda}_d},$$

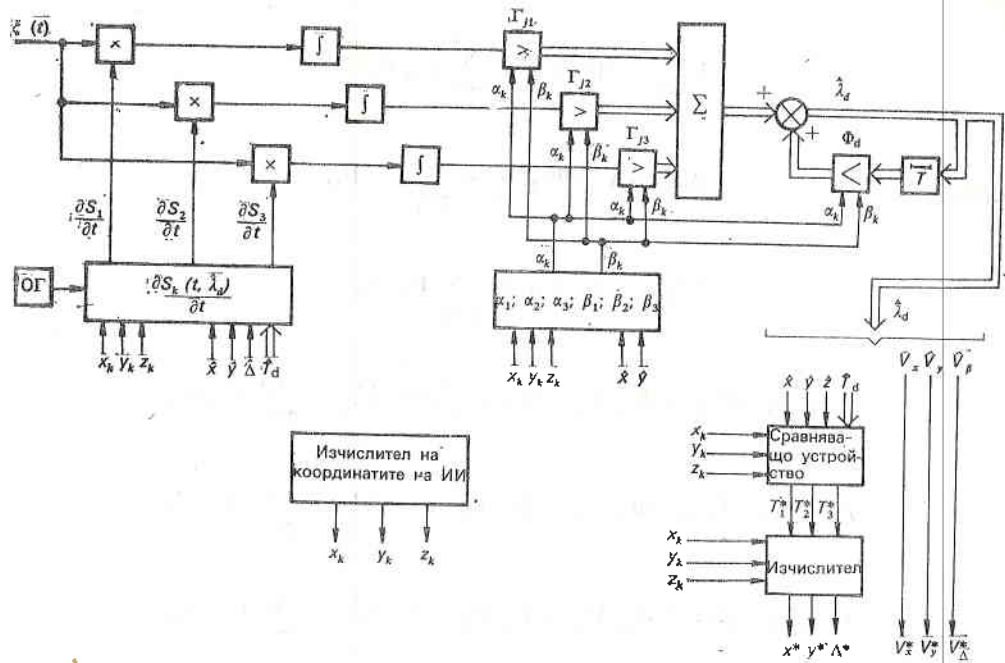
$$j = \overline{1,9}, \quad k = \overline{1,3},$$

$$B_k = - \int_{t_v}^{t_{v+1}} \xi(t) \frac{\partial S_k(t, \widetilde{\lambda}_d)}{\partial t} dt = Bc_k + Bu_k = \sum_{l=1}^3 Bc_{kl} + Bu_{kl},$$

$$Bc_{kl} = - \int_{t_v}^{t_{v+1}} s_l(t, \lambda_d) \frac{\partial S_k(t, \widetilde{\lambda}_d)}{\partial t} dt; \quad Bu_{kl} = - \int_{t_v}^{t_{v+1}} n(t) \frac{\partial S_k(t, \widetilde{\lambda}_d)}{\partial t} dt.$$

Ако пренебрегнем при умножението под интеграла членовете, съдържащи честота  $2\omega_0$ , изразите за  $Bc_{kl}$ ,  $Bu_{kl}$  придобиват вида

$$\begin{aligned}
 Bc_{kl} = 0,5 \int_{t_v}^{t_{v+1}} \left\{ \omega_0 f_k [t - T_k(\widetilde{\lambda})] f_l [t - T_l(\lambda)] \sin [\omega_0 (\widetilde{T}_{dk} - T_{dl})] \right. \\
 \left. - f_l [t - T_l(\lambda)] \frac{\partial f_k [t - T_k(\widetilde{\lambda})]}{\partial t} \cos [\omega_0 (\widetilde{T}_{dk} - T_{dl})] \right\} dt,
 \end{aligned}$$



Фиг. 1. Структурна схема на дискретен филтър

$$\begin{aligned}
 \text{Вш}_k = & \int_{t_v}^{t_{v+1}} n(t) \left\{ \omega_0 f_k [t - T_k(\tilde{\lambda})] \sin [\omega_0 (t - \tilde{T}_{dk})] \right. \\
 & \left. - \frac{\partial f_k [t - T_k(\tilde{\lambda})]}{\partial t} \cos [\omega_0 (t - \tilde{T}_{dk})] \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Структурната схема на алгоритъм (35), (33), (34) е показана на фиг. 1. Приемникът се състои от три времеви дискриминатора и канали за формиране на оценките на параметрите  $\lambda_v$ . Всеки канал за оценка на параметър се състои от три умножителя  $\Gamma_{j1}$ ,  $\Gamma_{j2}$  и  $\Gamma_{j3}$ , суматор и нискочестотен филтър, формиращ съответната оценка. От изхода на нискочестотните филтри оценките  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{T}_{d1}$ ,  $\hat{T}_{d2}$  и  $\hat{T}_{d3}$  постъпват на входа на сравняващо устройство, което сравнява времезакъсненията на обвиващата и носещата на сигнала от всеки ИИ и формира оценки  $T_1^*$ ,  $T_2^*$ ,  $T_3^*$  по правилото  $\min_k |\hat{T}_{dv} + k_v T_0 E^T - T(\hat{x}_v, \hat{y}_v, \hat{\Delta}_v)| = \hat{T}_{dv} + k_v^* T_0 E^T = T_v^*$ . В изчислителя се извършва решаването на система уравнения (34) и се извеждат крайните оценки  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $\Delta^*$ . По резултати от оценките на параметрите се формират ъгли  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ , които се използват при изчисление на  $\Gamma_{jk}$ , производната на сигнала  $\partial s_k(t, \tilde{\lambda}_d)/\partial t$  и коефициентите  $\Phi_{72}$ ,  $\Phi_{82}$ ,  $\Phi_{92}$ ,  $\Phi_{74}$ ,  $\Phi_{84}$ ,  $\Phi_{94}$  на преходната матрица  $\Phi_d$ .

В приемника се осъществява оценка на времевото разсъгласуване  $\hat{\Delta}(t)$ , която след това се използва за филтрация на координатите  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Това напълно съответства на концепцията на псевдодалекомерния метод на навигация.

## Литература

1. Кондратьев, В. С., А. Ф. Котов, Л. Н. Марков. Многопозиционные радиотехнические системы (Под ред. проф. В. В. Цветанова). М., Радио и связь, 1986. 264 с.
2. Тихонов, В. И., В. Н. Харисов. Объединенная синхронизация в радиотехнических системах. — Радиотехника, 1984, № 4.
3. Харисов, В. Н. Нелинейная фильтрация при многомодальном аностернорном распределении. — Техническая кибернетика, 1985, № 5.
4. Харисов, В. Н., А. И. Яковлев, А. Г. Глушченко. Оптимальная фильтрация координат подвижного объекта. — Радиотехника и электроника, 1984, № 10.
5. Тихонов, В. И., В. Н. Харисов. Объединенная синхронизация в оптимальных радиотехнических системах. Радиоэлектроника. — В: Научные труды высших учебных заведений Литовской ССР, 1983.
6. Харисов, В. Н. Синтез и исследование характеристик объединенной системы синхронизации методом разделения задержек. — В: Тез докл. ВНТК „Проблемы повышения эффективности и качества систем синхронизации.“ Каунас, 1982.
7. Тихонов, В. И., В. Н. Харисов. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов. М., Радио и связь, 1991. 608 с.

Поступила на 30.11.1993 г.

The additional variable method in the problem of spatial coordinates and parameters of motion filtration of mobile objects

*Ventseslav Rashkov, Angel Christov*

(Summary)

An algorithm is developed for optimum signal processing with multiplex synchronization for multi-position radiotechnical navigation systems (MRNS) and satellite radiotechnical navigation (SRNS). Statistical methods are used for optimum filtration, as well as the additional variable method (AVM) and data concerning the radiosignals envelope and phase. Using MGNS high accuracy is obtained when the mobile objects determine their spatial coordinates and parameters of motion. The results are contained in the two synthesized variants of continuous and discrete filters.